TITLE:

Equivariant Isotopies of Semifree G-Manifolds (変換群のトポロジー)

AUTHOR(S):

小宮, 克弘

CITATION:

小宮, 克弘. Equivariant Isotopies of Semifree G-Manifolds (変換群のトポロジー). 数理解析研究所講究録 1981, 437: 29-39

ISSUE DATE:

1981-09

URL:

http://hdl.handle.net/2433/102771

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
437巻 1981年 29-39

Equivariant isotopies of semifree G-manifolds

山口大 理　小宮克弘

$\boxed{1}$ G を compact Lie group とする。smooth (即ち, C^∞) G-manifold M から N への smooth G-embedding が存在するとき, それらの G-isotopy class がどれくらいあるかということを考えてみたい。定理とその証明を簡潔にするために, M は closed で, N は boundary をもたず, M, N 上の G-action は semifree であるとする。smooth G-embedding $f: M \to N$ はその differential df により, fixed point set の normal bundle $\nu(M^G)$, $\nu(N^G)$ の間の G-vector bundle monomorphism を induce する。さらにこれより, 各 fibre 間の G-monomorphism より成る bundle $\mathcal{B} = \mathrm{Mon}^G(\nu(M^G), \nu(N^G))$ の cross section が induce される。このことより2つの smooth G-embedding $f, g: M \to N$ が G-isotopic であるか否かという問題が, それぞれから induce される $\mathcal{B}$ の cross section が homotopic であるか否かという問題

に転換される。 後者に対してわれわれは Steenrod [3] の obstruction theory を適用することができる。 このようにして obstruction theory によって G-isotopy class を分類することがこの報告の主題である。

この報告では概略を述べるにとどめる。 詳しくは [2] を参照されたい。 とくに M が G の表現 U 内の単位球面 $S(U)$, N がもう1つの表現 V の場合は [1] を参照されたい。

$\boxed{2}$ M から N への smooth G-embedding の G-isotopy set を $\mathrm{Iso}^G(M, N)$ で表わす。 N が connected であっても，その fixed point set N^G は connected であるとは限らない。 今，N^G が2つの disjoint な submanifold N_1^G, N_2^G の和であるとする。 2つの G-embedding $f_1, f_2 : M \to N$ が $f_1(M^G) \subset N_1^G$, $f_2(M^G) \subset N_2^G$ であるとすると，明らかに f_1 と f_2 は G-isotopic ではない。(それどころか G-homotopic にすらなり得ない。) このような f_1 と f_2 は初めから区別して考える方がよい。 よってわれわれは $\mathrm{Iso}^G(M, N)$ 全体を考えるのではなくて，その部分集合で次のような $\mathrm{Iso}_f^G(M, N)$ について考えることにする。 ここに，$\mathrm{Iso}_f^G(M, N)$ は1つの固定され

た smooth G-embedding $f: M \to N$ に対し, f と G-homotopic な smooth G-embedding の G-isotopy set である。

fixed point $x \in M^G$ に対し, x を含む M^G の連結成分を M^G_x で表わす。 M^G の各連結成分より1点ずつを任意にとり出しその全体を $C(M^G)$ で表わす。 このとき, M^G は連結成分の disjoint union $\bigcup_{x \in C(M^G)} M^G_x$ に分割される。 任意の $y \in M^G_x$ に対し, $\nu(M^G_x)$ の y 上の fibre $\nu_y(M^G_x)$ から $\nu(N^G_{f(x)})$ の $f(y)$ 上の fibre $\nu_{f(y)}(N^G_{f(x)})$ への G-monomorphism の全体

$$\bigcup_{y \in M^G_x} \mathrm{Mon}^G(\nu_y(M^G_x), \nu_{f(y)}(N^G_{f(x)}))$$

を考える. これは標準的な方法で M^G_x 上の fibre bundle になる。 これを

$$\mathrm{Mon}^G_f(\nu(M^G_x), \nu(N^G_{f(x)}))$$

あるいはもっと簡単に $\mathcal{B}$ で表わす。 このとき $\mathcal{B}$ の cross section と

$$f_x^G = f|M_x^G : M_x^G \to N_{f(x)}^G$$

を cover する $\mathcal{L}(M_x^G)$ から $\mathcal{L}(N_{f(x)}^G)$ への G-vector bundle monomorphism とは bijective に対応する。$\mathcal{B}$ の cross section の homotopy set を $\Gamma_f(M_x^G)$ で表わす。

G-isotopy class $[g] \in Iso_f^G(M, N)$ をとる。g と f が G-homotopic であることより, homotopy

$$H : M_x^G \times [0,1] \to N_{f(x)}^G = N_{g(x)}^G$$

で $H_0 = g_x^G$, $H_1 = f_x^G$ なるものが存在する。H を lift して, G-vector bundle monomorphism の homotopy

$$\tilde{H} : \mathcal{L}(M_x^G) \times [0,1] \to \mathcal{L}(N_{f(x)}^G)$$

で $\tilde{H}_0 = dg$ なるものが得られる。このとき, $\tilde{H}_1$ は f_x^G を cover する。よって, $\tilde{H}_1$ は $\mathcal{B}$ の cross section を induce する。それを $\Phi_x(g)$ で表わす.
対応

$$\Phi : Iso_f^G(M,N) \to \prod_{x\in C(M^G)} \Gamma_f(M_x^G)$$

を

$$\Phi([g]) = \prod [\Phi_x(g)]$$

と定める。ただし，これは任意の $x\in C(M^G)$ に対し $N^G_{f(x)}$ が $(\dim M^G_x+1)$-connected のとき well-defined である。例えば，N が G の表現 V の場合，V は G-contractible であるから Φ が定義される。

この Φ に対して次の定理が得られる：

<u>定理 1</u>. M，N を smooth semifree G-manifold で boundary はないとする。さらに，$M^G \neq \phi, M$，$N^G \neq \phi, N$ で M は compact であるとする。任意の $x\in C(M^G)$ に対し $N^G_{f(x)}$ が $(\dim M^G_x+1)$-connected であるとき，

(1) $\dim M + \max\{\dim M, \dim N^G\} < \dim N + \dim G$ ならば Φ は全射である。

(2) $\dim M + \max\{\dim M, \dim N^G\} + 1 < \dim N + \dim G$,

かつ，任意の $x \in C(M^G)$ に対し

$$2 \dim M^G_x + 1 < \dim N^G_{f(x)}$$

ならば Φ は全単射である。

全射であることの証明は具体的に G-embedding を構成することによって，単射であることの証明は具体的に G-isotopy を構成することによって為される。

<u>注意</u>．定理 1 において，M，N 上の G-action は semifree で，$M^G \neq \phi, M$，$N^G \neq \phi, N$ とした。このとき normal bundle $\nu(M^G)$，$\nu(N^G)$ の各 fibre は G の表現で原点を除いてはその action は free である。このような表現をどんな G でももつとは限らない。$\dim G = 0$（即ち，有限群）のときはかなり多くの G が上のような表現をもつ（Wolf [4]）が，$\dim G > 0$ のときは，S^1，S^3，$N_{S^3}(S^1)$（S^3 における S^1 の normalizer）の 3 つしかない。したがって定理 1 で考える G は有限群，S^1，S^3，$N_{S^3}(S^1)$ の場合のみである。

$\boxed{3}$ 次に $\Gamma_f(M^G_x)$ について考察しよう。

G の既約実表現で原点を除いてはその action が free であ

るようなもののひとつの complete set を $\{V_j \mid j \in J(G)\}$ とする。各 $j \in J(G)$ に対し

$$\mathbb{F}_j = \mathrm{Hom}^G(V_j, V_j)$$

とすると，$\mathbb{F}_j$ = 実数体 $\mathbb{R}$，複素数体 $\mathbb{C}$，又は４元数体 $\mathbb{H}$ である。V_j は，$\mathbb{F}_j = \mathbb{C}$ のとき複素表現を，$\mathbb{F}_j = \mathbb{H}$ のとき４元数表現を実表現とみたものである。整数 $0 \leqq m \leqq n$ に対して，$\mathbb{F}_j$ 上の n 次元ベクトル空間 $n\mathbb{F}_j$ における m-frame（orthonormal とは限らない。）の全体より成る Stiefel manifold を $V(m, n; \mathbb{F}_j)$ で表わす。これは $\mathrm{Mon}^G(mV_j, nV_j)$ と同一視される。

$y \in M_x^G$ に対し

$$\nu_y(M_x^G) \cong \bigoplus_{j \in J(G)} m_{x,j} V_j,$$

$$\nu_{f(y)}(N_{f(x)}^G) \cong \bigoplus_{j \in J(G)} n_{f(x),j} V_j$$

と分解される。ここに，$m_{x,j}$，$n_{f(x),j}$ は x と j にのみ依存し y には依存せずに決まる非負整数である。

次の定理は容易に得られる：

<u>定理２.</u>　$\nu(M_x^G)$ と $\nu(N_{f(x)}^G)$ がともに product

bundle ならば,

$$\Gamma_f(M_x^G) \approx \prod_{j \in J(G)} [M_x^G, V(m_{x,j}, n_{f(x),j} ; \mathbb{F}_j)]$$

ここに, [,] は homotopy set.

trivial G-space 上の G-vector bundle $\mathcal{V}(M_x^G)$, $\mathcal{V}(N_{f(x)}^G)$ は次のような Whitney sum に分解される:

$$\mathcal{V}(M_x^G) \cong \bigoplus_{j \in J(G)} (\xi_j \otimes_{\mathbb{F}_j} V_j),$$

$$\mathcal{V}(N_{f(x)}^G) \cong \bigoplus_{j \in J(G)} (\eta_j \otimes_{\mathbb{F}_j} V_j),$$

ここに, ξ_j, η_j は $\mathbb{F}_j$ 上の $m_{x,j}$ 次元, $n_{f(x),j}$ 次元の vector bundle である。このことより fibre bundle

$$\mathcal{B} = \mathrm{Mon}_f^G(\mathcal{V}(M_x^G), \mathcal{V}(N_{f(x)}^G))$$

は次のような Whitney sum に分解されることがわかる:

$$\mathcal{B} \cong \bigoplus_{j \in J(G)} \mathcal{B}_j$$

ここに，$\mathcal{B}_j$ の fibre は $V(m_{x,j}, n_{f(x),j}; \mathbb{F}_j)$ である。

$$d_j = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}_j ,$$

$$q_j = d_j(n_{f(x),j} - m_{x,j} + 1) - 1$$

とし，$\mathcal{B}_j(\pi_{q_j})$ を $\mathcal{B}_j$ の fibre の q_j-th homotopy group を fibre にもち $\mathcal{B}_j$ に associate した bundle とする（詳しくは Steenrod [3] 30.2 参照）。Steenrod [3] の 37.2 および 37.5 より次の定理が得られる：

<u>定理 3.</u> (1) $m_{x,j} \neq 0$ なる $j \in J(G)$ に対して

$$\dim M_x^G \leqq q_j + 1$$

のとき，$\Gamma_f(M_x^G)$ から

$$\prod_{j \in J(G)} H^{q_j}(M_x^G ; \mathcal{B}_j(\pi_{q_j}))$$

への全射が存在する．

(2) $m_{x,j} \neq 0$ なる $j \in J(G)$ に対して

$$\dim M_x^G \leqq q_j$$

のとき，$\Gamma_f(M_x^G)$ から

$$\prod_{j\in J(G)} H^{q_j}(M_x^G ; \mathcal{B}_j(\pi_{q_j}))$$

への全単射が存在する。

係数の bundle $\mathcal{B}_j(\pi_{q_j})$ は多くの場合に product bundle となる。よってこの場合，定理 3 において捩れ係数の cohomology group $H^{q_j}(M_x^G ; \mathcal{B}_j(\pi_{q_j}))$ は

$$\Lambda_j = \pi_{q_j}(V(m_{x,j}, n_{f(x),j} ; F_j))$$

を係数とする通常の cohomology group $H^{q_j}(M_x^G ; \Lambda_j)$ で置換えることができる。$\mathcal{B}_j(\pi_{q_j})$ が product bundle になる場合を次の命題にまとめておく：

<u>命題 4.</u> 次の (i)～(iv) の場合は $\mathcal{B}_j(\pi_{q_j})$ は product bundle である：

(i) G の位数が 2 でない。

(ii) $\nu(M_x^G)$ と $\nu(N_{f(x)}^G)$ がともに orientable.

(iii) G の位数が 2 で，$m_{x,j} \geqq 2$，さらに，
$q_j = n_{f(x),j} - m_{x,j}$ が奇数。

(iv) M_x^G が単連結。

(i), (ii), (iii) の場合は $\mathcal{B}_j(\pi_{q_j})$ の structure group が trivial になることよりわかる。(iv) の場合は $\mathcal{B}_j(\pi_{q_j})$ の fibre が discrete であることより明らか。

文　　献

[1] K. Komiya; Equivariant embeddings and isotopies of a sphere in a representation, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[2] K. Komiya; Equivariant isotopies of semifree G-manifolds, To be submitted to Osaka J. Math.

[3] N. Steenrod; The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951.

[4] J. A. Wolf; Spaces of constant curvature (4-th edition), Publish or Perish Inc, 1977.

//